18/11/19

Μέθοδος των χαρακτηριστικών

Επανερχόμαστε στην εξίσωση $\frac{\partial u}{\partial t} - a_1 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$

Γνωρίζ. ότι αν θέσουμε $\xi = x - ct$, τότε:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = -c \cdot u_\xi$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = u_\xi$$

αντικαθιστούμε στην εξίσωση: $-c \cdot u_\xi - a_1 \cdot u_\xi = 0$

$$\Rightarrow -(c + a_1) u_\xi = 0$$

$$\Rightarrow c = -a_1$$

Δηλ. η γενική λύση της εξίσ. $u = f(\xi) = f(x + a_1 t)$

Μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση κ' με μετασχ. Fourier:

$$F\left\{ \frac{du}{dt} - a_1 \frac{du}{dx} \right\} = 0 \Rightarrow \frac{d\hat{u}}{dt} - a_1 i k \hat{u} = 0$$

$\hat{u}(k,t) = c(k) e^{i a_1 k t}$ $\qquad \Rightarrow \hat{u}_t - a_1 i k \hat{u} = 0$

$\hat{u}(k,0) = c(k)$

(αρχ. συνθήκη)

κ' από τον αντίστροφο μετασχηματι

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int$$

Από το θεώρημα της μετατόπισης

$u(x,t) = f(x + a_1 t)$, όπου $f(x)$ η αρχ. συνθήκη

κ' $c(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{ikx} dx = \hat{f}(k)$

Αναζητούμε τον τρόπο / μέθοδο για να βρίσκουμε τις κατάλληλες αλλαγές στις (ανεξάρτητες) μεταβλητές.

Βασική ιδέα

Θεωρώ την εξίσωση $\frac{\partial u}{\partial t} - a_1 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0$,

κ' την γράφω σε μορφή τέλειου διαφορικού:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} \qquad \text{αν } \frac{\partial x}{\partial t} = -a_1$$

$$\Rightarrow x + a_1 t = c$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} - a_1 \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

Χρειάζομαι ολικά διαφορικά:

$$\boxed{du = \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \partial t + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \partial x} = 0$$

Η εξίσωση $1 \frac{\partial u}{\partial t} - a_1 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$

$$\frac{du}{0} = \frac{dx}{-a_1} = \frac{dt}{1}$$

Πόσα dx έχω?
↳ $-a_1$ (από τη 2η σχέση)

Πόσα dt?
↳ 1 (πάλι με τον ίδιο τρόπο)

Πόσα du?
↳ 0 αφού **du=0**

γιατί έχω διαιρ. με 0 $\Rightarrow u = c_1$

$dx = -a_1 dt$

$\Rightarrow x = -a_1 t + c_2$

$\Rightarrow u = c_1$

$x + a_1 t = c_2$

Αρχική συνθήκη:

$u(x,0) = f(x)$

$$\begin{cases} u(x,0) = f = c_1 \\ x = c_2 \end{cases} \qquad f(c_2) = c_1, \quad x = c_2$$

$\forall t \quad u = f(c_2) = f(x + a_1 t)$ $\qquad u = c_1$, $\boxed{x + a_1 t = c_2}$

$\boxed{\text{ΠΑΡΑΔ}}$: Να λυθεί η εξίσωση

$$x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = u$$

ΛΥΣΗ:

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

Λύνω τις εξισώσεις ανά δύο:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{x} &= \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln x = \ln y + c_1 \\ \frac{du}{u} &= \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln u = \ln x + c_2 \end{aligned}\right] \quad \begin{aligned} x &= c_1 y \\ u &= c_2 x \end{aligned}$$

$$\left.\begin{cases} \frac{x}{y} = c_1 \\ \frac{u}{x} = c_2 \end{cases}\right] \Rightarrow u = c_2 x = f(c_1) \cdot x = f\left(\frac{x}{y}\right) \cdot x$$

Διαλέγω άλλα ζεύγη:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{x} &= \frac{dy}{y} \\ \frac{du}{u} &= \frac{dy}{y} \end{aligned}\right] \quad \begin{aligned} &x = c_1 y \\ &u = c_2 y = g(c_1) = g\left(\frac{x}{y}\right) \cdot y \end{aligned}$$

$$= g\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{x}{c_1} = \underbrace{\frac{g(x/y)}{c_1}}_{f(x/y) \cdot x} \cdot x$$

ΠΑΡΑΔ. : Να λυθεί η εξίσωση

$$x^2 u_x + y^2 u_y = (x+y)u$$

ΛΥΣΗ:

$$\frac{du}{(x+y)u} = \frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2}$$

Επιλέγω τα ζεύγη:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{x^2} = \dfrac{dy}{y^2} \Rightarrow -\dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{y} + c_1 \Rightarrow \boxed{\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} = c_1} \\ \dfrac{du}{(x+y)u} = \dfrac{dx}{x^2} \end{cases}$$

Λύνω ως προς y: $\frac{1}{y} = \frac{1}{x} + c_1 \Rightarrow \boxed{y = \frac{x}{c_1 x + 1}}$

Στη δευτερη εξίσωση:

$$\frac{du}{\underbrace{\left(x + \frac{x}{c_1 x + 1}\right)}_{\frac{c_1 x^2 + 2x}{c_1 x + 1}} u} = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{c_1 x^2 + 2x}{(c_1 x + 1)x^2} dx$$

$$\Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{c_1 x^2 + 2x}{c_1 x^3 + x^2} dx$$

$$\Rightarrow u = c_2 \cdot \frac{x^2}{1 + c_1 x}$$

$$= g(c_1) \cdot \frac{x^2}{1 + c_1 x}$$

$$= g\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) \frac{x^2}{1 + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) x}$$

ΑΣΚΗΣΗ : Να λυθεί η εξίσωση

$$(y-z) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + (z-x) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + (x-y) \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$u = f(x+y+z \,,\, x^2 + y^2 + z^2)$$

$\boxed{\text{ΠΑΡΑΔ}}$: Να λυθεί η εξίσωση $yu_x + xu_y = u$

όταν $u(x,0) = x^3$

$u(0,y) = y^3$

ΛΥΣΗ:

Κατά τα γνωστά: $\frac{du}{u} = \frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}$

Επιλέγω τα ζεύγη:

$$\begin{cases} \frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} \Rightarrow x^2 - y^2 = c_1 \\ \frac{du}{u} = \frac{dx}{y} \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} y\,du = u\,dx \\ x\,dx = y\,dy \\ x\,du = u\,dy \end{matrix}\right\rangle (y+x)\,du = u(dx+dy)$$

$$= u\,d(x+y)$$

δηλ. $\frac{du}{u} = \frac{d(x+y)}{x+y}$

$$\Rightarrow u = c_2(x+y) = f(c_1)\cdot(x+y)$$

$$= f(x^2-y^2)\cdot(x+y)$$

$x^2 - y^2 = c_1$

Όμως: $\begin{cases} u(x,0) = x^3 \Rightarrow f(x^2)\cdot x = x^3 \\ u(0,y) = y^3 \Rightarrow f(-y^2)\cdot y = y^3 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x^2) = x^2 \\ f(-y^2) = y^2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = |x|$$

Λύση του προβλήματος:

$$u(x,y) = |x^2-y^2|\cdot(x+y)$$

Η εξίσωση Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{du}{0} = \frac{dt}{1} = \frac{dx}{u} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u = c_1 \\ x - c_1 t = c_2 \end{array}\right] \quad u = c_1 = f(c_2) = f(x - c_1 t) = f(x - ut)$$

Δίνουμε μια αρχική συνθήκη:

$$u(x,0) = f(x)$$

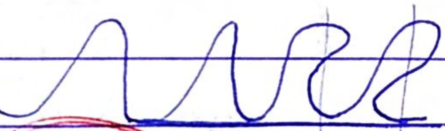
$$u(x,t) = f(x - ut) = f(\xi)$$

$$\Rightarrow x = \xi + f(\xi)\,t$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{f'(\xi)+1} \qquad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{-f(\xi)}{f'(\xi)+1}$$

$\exists$ είναι χρόνος $t = -\frac{1}{f'(\xi)}$ που η λύση σπάει

κι οι παράγωγοι γίνονται ασυνεχείς!
Τότε έχω ωστικό κύμα (shock wave)



(παραλία)

Ένα άλλο ωστικό κύμα είναι όταν σπάει το φράγμα του ήχου (ακούς μπαμ) **ή** άλλο Παράδ. το σκάσιμο μπαλονιού

→

Shock waves κ' η συνθήκη Rankine - Hugoniot

Λύνω την εξίσωση Burgers με ιξώδες

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \underbrace{v \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\text{ιξώδες}} \quad , \quad v \in \mathbb{R}$$

Όταν $v=0$, έχουμε την εξίσωση Burgers, δηλ.

$v=0$: $\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t}(u) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0$$

Αν θεωρήσω μηδενικές συνοριακές συνθήκες

$u(\pm\infty, t) = 0$

Ολοκληρώνω: $\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty} u\,dx = -\frac{u^2}{2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$

Η ποσότητα $\int_{-\infty}^{+\infty} u\,dx$ διατηρείται στον χρόνο!

(Νόμος διατήρησης)

$$u(x,t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x}^{x+\Delta x} u(x', t)\,dx'$$

Παραγωγίζω ως προς t, κ' $\Delta x \to 0$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{x}^{x+\Delta x} u\,dx' + \frac{1}{2}\cdot\left[u^2(x+\Delta x, t) - u^2(x,t)\right] = 0$$

γιατί

$$\int_{a}^{x} u\,dx$$

$$\frac{\int_{a}^{x+\Delta x} u\,dx + \int_{x}^{a} u\,dx}{\Delta x}$$

Όταν έχω ασυνέχεια

↓ Τι κάνω ?

Ολοκλήρωμα

↓ Πως ?

Fourier

↓

Cauchy